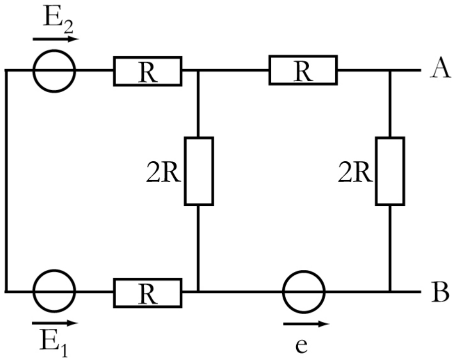
Correction DM

Exercice I Dipôle équivalent



Soit le dipôle AB ci-contre :

1. Quelle est la valeur à donner à e pour que le dipôle AB soit équivalent à un résistor pur ? La réponse devra évidemment être justifiée par l'emploi de la méthode de votre choix.

   Solution : On va utiliser le théorème de Thévenin. Avant cela, on extrait la résistance de 2R dans la branche de droite, et on la réintègrera ensuite. De plus, on transforme de manière évidente la branche de gauche en un seul générateur de fem $E_2 - E_1$ dans le sens de B vers A en série avec une résistance 2R.
   La résistance de Thévenin équivalent est obtenue en éteignant toutes les sources, et donne une résistance totale de :
   $$R_{th} = R + (2R//2R) = 2R$$
   D'autre part, en éteignant e, on trouve une contribution de $\frac{E_2-E_1}{2}$. En éteignant l'autre partie, on trouve une contribution de -e. Finalement, on trouve :
   $$E_{th} = \frac{E_2 - E_1}{2} - e$$
   Le dipôle, avec ou sans la résistance 2R, est purement résistif si la fem du générateur de Thévenin s'annule, c'est à dire si :
   $$e = \frac{E_2 - E_1}{2}$$

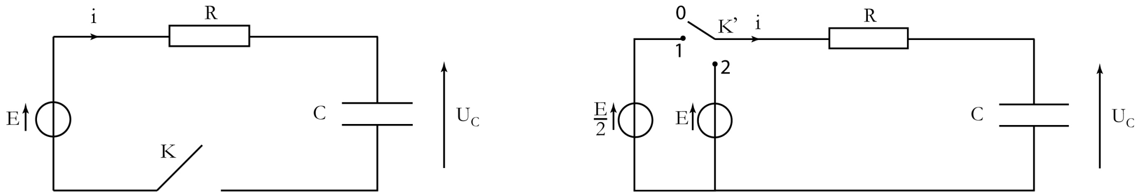
2. Déterminer alors sa résistance.

   Solution : La résistance est alors R_{th} en parallèle avec la résistance de 2R que l'on avait retiré, c'est à dire une résistance équivalent valant R.

3. Application numérique : E_1=2 V, E_2=6 V, et R=1 kΩ.

   Solution : On trouve donc e=2 V et R_{eq}=1 kΩ

Exercice II Etude énergétique de la charge d'un condensateur



(a) Échelon de tension de 0 à E. (b) Échelon de tension de $\frac{E}{2}$ à E.

FIGURE 1 : *Différents échelons de tension.*

On considère un condensateur de capacité C initialement déchargé, dans le circuit ouvert représenté en figure 1(a). À l'instant t=0, on commute l'interrupteur K de manière à établir la tension E aux bornes du circuit RC en série.

1. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C au cours du temps.

Solution : Comme dans le cadre du cours, nous pouvons utiliser la loi des mailles dans le circuit de la figure 1(a) lorsque l'interrupteur est fermé. On trouve :

$$u_C + Ri = E \Rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Ce qui donne sous sa forme canonique :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau} \tag{1}$$

avec $\tau = RC$.

2. Résoudre l'équation différentielle et exprimer u_C en fonction du temps, de E et de $\tau = RC$.

Solution : Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$u_C^H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

où A est une constante réelle. D'autre part, une solution particulière correspond à une valeur constante pour u_C valant E. On en déduit que les solutions générales de l'équation différentielle (1) sont de la forme :

$$u_C(t) = Ae^{\frac{-t}{\tau}} + E$$

Reste à déterminer A. On utilise pour cela les conditions initiales données par la continuité de la tension aux bornes du condensateur et une tension nulle pour t<0. On en déduit que $u_C(t=0) = 0$ d'où $A + E = 0$, c'est-à-dire $A = -E$. On en déduit que :

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

3. En fin de charge (pour $t \gg \tau$), quelle est l'énergie $\mathcal{E}_C$ emmagasinée par le condensateur ? Quelle énergie $\mathcal{E}_G$ le générateur a-t-il fournie ?

Solution : En fin de charge, la tension aux bornes du condensateur est E et l'énergie qui y est emmagasinée vaut :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2$$

L'énergie fournie par le générateur pendant le temps de charge vaut :

$$\mathcal{E}_G = \int_{t=0}^{t\to\infty} Ei(t)dt = CE\int_{t=0}^{t\to\infty}\frac{du_C}{dt}dt = CE\int_{u_C=0}^{u_C=E} du_C$$

On trouve donc que cette énergie vaut :

$$\mathcal{E}_G = CE^2$$

4. En déduire le rendement $\rho = \frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}_G}$ de la charge.

Solution : Le rendement de la charge vaut alors :

$$\rho = \frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}_G} = \frac{1}{2}$$

Réalisons maintenant la même charge en deux étapes. On considère le condensateur initialement déchargé, dans le circuit ouvert représenté en figure 1(b). À l'instant t=0, on commute l'interrupteur K' en position 1, de manière à établir une tension $\frac{E}{2}$ aux bornes du circuit RC en série.

5. En s'appuyant sur les résultats des items précédentes, déterminer l'énergie fournie par le générateur $\mathcal{E}_{G1}$ lors de cette première étape de la charge, après un temps $t \gg \tau$.

Solution : Par identification avec les résultats des item précédentes, lors de cette première étape de charge, le générateur a fourni une énergie :

$$\mathcal{E}_{G1} = \frac{CE^2}{4}$$

Une fois la première charge effectuée, on commute l'interrupteur K' en position 2.

6. Calculer alors l'énergie fournie par le générateur $\mathcal{E}_{G2}$ lors de cette deuxième étape de la charge.

Solution : Lors de la deuxième charge, le générateur fait passer la tension aux bornes du condensateur de la valeur E/2 à la valeur E. Il fournit alors une énergie :

$$\mathcal{E}_{G2} = CE\int_{u_C=E/2}^{u_C=E} du_C$$

C'est à dire :

$$\mathcal{E}_{G2} = \frac{CE^2}{2}$$

7. Quelle est l'énergie $\mathcal{E}_C$ emmagasinée dans le condensateur ?

Solution : L'énergie emmagasinée par le condensateur est quant à elle toujours la même car elle ne dépend que de la tension finale à ses bornes : E. D'où $\mathcal{E}_C = \frac{CE^2}{2}$.

8. En déduire le nouveau rendement $\rho' = \frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}_{G1}+\mathcal{E}_{G2}}$ de la charge en deux étapes.

Solution : Le nouveau rendement vaut alors :

$$\rho' = \frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}_{G1}+\mathcal{E}_{G2}} = \frac{CE^2}{2CE^2(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})}$$

d'où :

$$\rho' = \frac{2}{3}$$

9. Compte tenu des rendements obtenus lors de la charge du condensateur avec les deux méthodes précédentes, indiquer comment il faudrait procéder pour faire tendre le rendement de la charge du condensateur vers 1. Aucun calcul n'est demandé dans cette question.

Solution : On remarque que $\rho' > \rho$ c'est à dire un meilleur rendement est obtenu en réalisant des charges successives plutôt qu'en réalisant une seule charge, à état final identique ! On en déduit qu'en réalisiant une nfinité de charges successives on approcherait un rendement de 1... en théorie !